需证 $\dfrac{\left[\sum a(a+\sqrt{bc})\right]^2}{4\sum ab} \geqslant \sum ab$，即证 $\left[\sum a(a+\sqrt{bc})\right]^2 \geqslant 4\left(\sum ab\right)^2$，即证 $\sum a(a+\sqrt{bc}) \geqslant 2\sum ab$，即证 $\sum (a-b)^2 \geqslant \sum c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$，即证 $\sum (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant \sum c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$，即证 $\sum \left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - c\right](\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$，即证 $\sum (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$，即证 $\sum (\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

设 $x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{b}$，$z=\sqrt{c}$，即证 $\sum (x+y-z)(x-y)^2 \geqslant 0$，即证 $\sum x^3 + 3xyz \geqslant \sum x^2(y+z)$. 上式即为 Schur 不等式，所以，原不等式成立.

从证法 1 与证法 2，我们得到赛题的两个加强不等式链，整理如下：

加强不等式链 1　设 a、b、$c>0$，则 $\sum \dfrac{a(a^2+bc)}{(b+c)} \geqslant \dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum ab} + \dfrac{9abc}{2\sum a} \geqslant \dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum ab} + \sum ab - \dfrac{1}{2}\sum a^2 \geqslant \sum ab$.

加强不等式链 2　设 a、b、c 均为正数，则

$$\sum \frac{a(a^2+bc)}{(b+c)} \geqslant \sum \frac{a(a+\sqrt{bc})^2}{2(b+c)} \geqslant \frac{\left[\sum a(a+\sqrt{bc})\right]^2}{4\sum ab} \geqslant \sum ab.$$

进一步的问题是：能否将两个不等式链合二为一？事实上，当 $a=b=1$，$c=2$ 时，有 $\dfrac{\left[\sum a(a+\sqrt{bc})\right]^2}{4\sum ab} > \dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum ab} + \dfrac{9abc}{2\sum a}$，但当 $a=b=100$，$c=1$ 时，有 $\dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{2\sum ab} + \sum ab - \dfrac{1}{2}\sum a^2 > \sum \dfrac{a(a+\sqrt{bc})^2}{2(b+c)}$，所以，两个不等式链不能合二为一.

参考文献

[1] 中国数学会普及工作委员会及数学奥林匹克委员会组编. 高中数学联赛备考手册(2019)[M]. 上海：华东师范大学出版社，2018.

[2] 刘康宁. 2018 年全国高中数学联赛陕西赛区预赛[J]. 中等数学，2018(7)：33－37.