

需证  $\frac{[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2}{4 \sum ab} \geq \sum ab$ , 即证  $[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2 \geq 4(\sum ab)^2$ , 即证  $\sum a(a + \sqrt{bc}) \geq 2 \sum ab$ , 即证  $\sum (a - b)^2 \geq \sum c(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ , 即证  $\sum (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq \sum c(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ , 即证  $\sum [(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c](\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ , 即证  $\sum (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ , 即证  $\sum (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ .

设  $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$ , 即证  $\sum (x + y - z)(x - y)^2 \geq 0$ , 即证  $\sum x^3 + 3xyz \geq \sum x^2(y + z)$ . 上式即为 Schur 不等式, 所以, 原不等式成立.

从证法1与证法2, 我们得到赛题的两个加强不等式链, 整理如下:

**加强不等式链1** 设  $a, b, c > 0$ , 则  $\sum \frac{a(a^2 + bc)}{(b + c)} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \frac{9abc}{2 \sum a} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \sum ab - \frac{1}{2} \sum a^2 \geq \sum ab$ .

**加强不等式链2** 设  $a, b, c$  均为正数, 则

$$\sum \frac{a(a^2 + bc)}{(b + c)} \geq \sum \frac{a(a + \sqrt{bc})^2}{2(b + c)} \geq \frac{[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2}{4 \sum ab} \geq \sum ab.$$

进一步的问题是: 能否将两个不等式链合二为一? 事实上, 当  $a = b = 1, c = 2$  时, 有  $\frac{[\sum a(a + \sqrt{bc})]^2}{4 \sum ab} > \frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \frac{9abc}{2 \sum a}$ , 但当  $a = b = 100, c = 1$  时, 有  $\frac{(\sum a^2)^2}{2 \sum ab} + \sum ab - \frac{1}{2} \sum a^2 > \sum \frac{a(a + \sqrt{bc})^2}{2(b + c)}$ , 所以, 两个不等式链不能合二为一.

**参考文献**

- [1] 中国数学会普及工作委员会及数学奥林匹克委员会编. 高中数学联赛备考手册(2019)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2018.
- [2] 刘康宁. 2018年全国高中数学联赛陕西赛区预赛[J]. 中等数学, 2018(7): 33-37.

**版权声明**

本刊已许可中国知网、万方数据、维普资讯、超星及博看网等以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文. 如作者不同意网络传播, 请在投稿时声明, 本刊将做适当处理.

方式二: 微信扫描二维码进入中国邮政-微商城订阅.



中学教学研究  
¥8.0

**欢迎订阅**

方式一: 邮局各网订, 邮发代号 44-33.