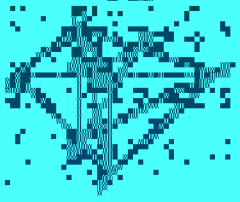


... 证明: $x_1 + x_2 < 2$



... 在参考答案中, 对第(1)问, 当 $a > 0$ 时, 为什么

想到要取 b 满足 $b < 0$ 且 $b < \ln \frac{a}{2}$, 很诡异, 不自然,

难懂. 下面解法自然, 易理解. 第(2)问, 用逆向思

考, 利用函数的单调性, 等价转化为函数值间的不

等关系, 构造函数, 可轻松求解.

(1) 解法 1: (对参数分类讨论) $f'(x) = (x - 1)^x + 2a(x - 1) = (x - 1)^x + 2a(x - 1) = (x - 1)^x + 2a(x - 1)$

(i) 设 $a = 0$, 则 $f(x) = (x - 2)^x, f(x)$ 只有一个零点 $x = 2$, 不符合题意.

(ii) 设 $a > 0$, 则当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. 又 $f(1) = -e < 0$, $f(2) = a > 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 此时 $f(x)$ 存在两个零点, 符合题意.

(iii) 设 $a < 0$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = \ln(-2a)$. 若 $a \geq -\frac{e}{2}$, 则 $\ln(-2a) \leq 1$, 故当 $x \in$

... 教学不仅是传授学生知识, 更重要的是培养学生

的思维能力, 进行思想引领. 在课堂教学中, 应抓住

思维训练这条主线, 进行变式教学, 通过问题驱

动, 激发学生去思考、创新. 变式就是改变问题的条

件或结论, 变换问题的形式或内容, 一般化或特殊

化, 从而使学生对问题的认识不断深化.

4. 问题变式要自然

0, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, $h(x) > h(1) = 0$, 从而原问题得证.

证法 2: 由解法 2 知 $f(x)$ 零点满足 $x_1 < 1 < x_2$, 则要证明 $x_1 + x_2 < 2 \Leftrightarrow 1 < x_2 < 2 - x_1$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, \therefore 只需证 $g(x_2) > g(2 - x_1)$, 又 $g(x_1) = g(x_2)$, 从而只需证 $g(x_1) > g(2 - x_1), x_1 < 2 - x_1$, 即证 $\frac{2 - x_1}{x_1} e^{x_1} > \frac{(1 - x_1)^2}{x_1} e^{2 - x_1}$, 构造函数 $\varphi(x) = e^x(2 - x) - xe^{2 - x}, x < 1$, 问题转化为证明当 $x < 1$ 时 $\varphi(x) > 0, \therefore \varphi'(x) = (e^x - e^{2 - x})(1 - x), \therefore$ 当 $x < 1$ 时, $e^x - e^{2 - x} < 0, \varphi'(x) < 0, \varphi(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减, $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, 原问题得证.