个零点,证明:$x_1+x_2<2$.

在参考答案中,对第(1)问,当 $a>0$ 时,为什么想到要取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$,很诡异,不自然,难懂.下面解法自然,易理解.第(2)问,用逆向思考,利用函数的单调性,等价转化为函数值间的不等关系,构造函数,可轻松获解.

(1)**解法1**:(对参数分类讨论)$f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

(i)设 $a=0$,则 $f(x)=(x-2)e^x$,$f(x)$ 只有一个零点 $x=2$,不符合题意.

(ii)设 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减,在 $(1,+\infty)$ 单调递增.又 $f(1)=-e<0$,$f(2)=a>0$,当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,此时 $f(x)$ 存在两个零点,符合题意.

(iii)设 $a<0$,由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.若 $a\geqslant-\frac{e}{2}$,则 $\ln(-2a)\leqslant1$,故当 $x\in$

0,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,$h(x)>h(1)=0$,从而原问题得证.

证法2:由解法2知 $f(x)$ 零点满足 $x_1<1<x_2$,则要证明 $x_1+x_2<2\Leftrightarrow1<x_2<2-x_1$,$\because g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,$\therefore$ 只需证 $g(x_2)>g(2-x_1)$,又 $g(x_1)=g(x_2)$,从而只需证 $g(x_1)>g(2-x_1)$,$x_1<1$,即证 $\frac{2-x_1}{(x_1-1)^2}e^{x_1}>\frac{x_1}{(1-x_1)^2}e^{2-x_1}$,构造函数 $\varphi(x)=e^x(2-x)-xe^{2-x}$,$x<1$,问题转化为证明当 $x<1$ 时 $\varphi(x)>0$,$\because\varphi'(x)=(e^x-e^{2-x})(1-x)$,$\therefore$ 当 $x<1$ 时,$e^x-e^{2-x}<0$,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减,$\varphi(x)>\varphi(1)=0$,原问题得证.

四、问题变式要自然

教学不仅是传授学生知识,更重要的是培养学生的思维能力,进行思想引领.在课堂教学中,应抓住思维训练这条主线,进行变式教学,通过问题驱动,激发学生去思考、创新.变式就是改变问题的条件或结论,变换问题的形式或内容,一般化或特殊